

2本のキラル円柱による エルミート・ガウスビーム波の近傍散乱界

木下 政美¹⁾ · 横田 光広²⁾

Scattered Near Field of a Hermite–Gaussian Beam by Two Chiral Cylinders

Masami KINOSHITA, Mitsuhiro YOKOTA

Abstract

Scattered near field of a Hermite–Gaussian beam by two chiral cylinders is examined theoretically. By using the relation between the conventional Hermite–Gaussian beam and the multipoles with complex source point, the scattered fields are expressed as a superposition of the scattered multipole fields. Electromagnetic fields are expanded in terms of the cylindrical vector wave functions. The unknown expansion coefficients for the scattered field and the internal field are obtained by using the boundary condition. As numerical examples, the scattered near fields of the lowest-order beam are calculated and the effects of chirality and the distance between two cylinders on the scattered fields are examined.

Key Words :

Chiral medium, Multiple scattering, Complex source point method, Cylindrical vector wave functions

1. まえがき

近年、光学活性を示すキラル媒質^{1),2)}と電磁界との相互作用について興味を持たれている。キラル媒質は、機能素子としての応用が考えられており、キラルスラブにおける反射および透過³⁾、キラルグレーティングからの放射特性⁴⁾、円柱⁵⁾、球⁶⁾、および任意形状の物体による散乱^{7),8)}などについて報告が行なわれている。

一方、電磁ホーンやレーザからの射出光は、近軸領域では通常のエルミート・ガウスビーム波で精度良く近似できることが知られている。Siegman⁹⁾により提案された複素エルミート・ガウスビーム波は、高次モードでは波面が球面でないために通常の球面共振器などの解析には適さない。しかしながら、複素ビーム波は、複素空間に波源を有する多重極界と密接な関連¹⁰⁾をもつことが知られてる。複素エルミート・ガウスビーム波は理論解析する際は優れているが、実用上取り扱い難い面がある。この問題を解決するために、良く用いられ

ている通常のビーム波と複素ビーム波との関係式¹¹⁾が導かれた。この関係式を用いて、筆者の一人はキラル球¹²⁾やキラル円柱¹³⁾によるエルミート・ガウスビーム波の散乱問題について検討を行ってきた。

物体が複数存在する場合、物体間での多重散乱の影響が大変重要になってくる。多数の物体による散乱問題はこれまでに多くの研究が行われている^{14),15)}。多数のキラル球がランダムに配置された媒質の等価誘電率の評価¹⁶⁾が報告されているが、ビーム波が入射した場合の複数キラル円柱による散乱については検討されていないようである。

本研究では、通常のエルミート・ガウスビーム波と複素多重極界との関係を用いて、2本のキラル円柱による散乱問題について解析している。2本のキラル円柱は、多重散乱を検討する際の最小単位と考えることができる。円柱による散乱電磁界および各円柱内部の電磁界を円柱ベクトル波動関数で展開する。未知係数は境界条件から求める。数値例として、等しい2本のキ

¹⁾電気電子工学専攻大学院生

²⁾電気電子工学科助教授

ラル円柱による近傍散乱電界を計算し、キラル係数と円柱の間隔の影響について検討を行なっている。なお、本論文では、時間因子を $\exp(j\omega t)$ とし以下これを省略する。

2. 複素多重極解とガウスビーム波との関係

複素点 $(0, -jb)$ に置かれた波源からの放射界 G_0 は、0 次第 2 種ハンケル関数 $H_0^{(2)}(k\tilde{R})$ で与えられる。ただし、 $\tilde{R} = \sqrt{x^2 + (\tilde{z} + jb)^2}$ は複素距離であり、 \tilde{R} の分岐として放射条件を満足するように選んでいる。係数 $b(= kw_0^2/2)$ は最低次モードの最小スポットサイズ w_0 と関連しており、 $k(= 2\pi/\lambda)$ は自由空間中における波数である。複素多重極界を次式で定義する¹⁰⁾。

$$G_n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G_0 \quad (1)$$

通常のエルミート・ガウスビーム波 ψ_n は、漸近・近軸近似の下で複素多重極界の有限項和で表すことができる¹¹⁾。

$$\psi_n = (-1)^n k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n!w_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-kb} \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{2^{-p} w_0^{n-2p}}{p!(n-2p)!} G_{n-2p} \quad (2)$$

式(2)より、通常のエルミート・ガウスビーム波の散乱界は複素多重極界の散乱界の重ね合わせで与えられることがわかる。従って、以下では複素多重極界の散乱問題について解析を行う。

3. キラル円柱によるエルミート・ガウスビーム波の散乱

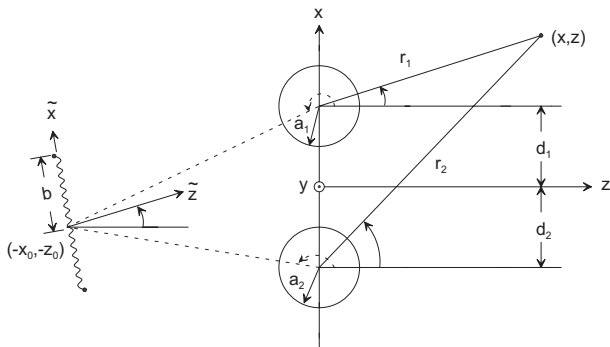


図1 問題の座標系

本節では、図1に示すようにエルミート・ガウスビーム波が2本のキラル円柱に入射した場合の散乱問題について解析を行う。ただし、入射ビーム波は柱軸方向に偏波(E偏波)しており、各キラル円柱は半径 a_i 、非誘電率 ϵ_{r_i} 、比透磁率 μ_{r_i} 、キラル係数 κ_i ($i = 1, 2$) のパ

ラメータで構成されている。キラル媒質における構成方程式を次式で定義する。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} - j\kappa \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{H} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = j\kappa \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{E} + \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (4)$$

この媒質中では2つの固有値(伝搬係数) $k^+, -k^-$ を持つことが知られている。

$$k^\pm = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} (\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \pm \kappa) \quad (5)$$

本研究で用いる円柱ベクトル波動関数 $\mathbf{N}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i)$ 、 $\mathbf{M}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i)$ を次式で定義する。

$$\mathbf{M}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) = \nabla \times [\hat{y} f_n^{(p)}(k, \mathbf{r}_i)] \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_n^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) = \frac{j}{k} \nabla \times \mathbf{M}_n^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) \quad p = 1, 2 \quad (7)$$

ここで、 \hat{y} は y 軸方向の単位ベクトルであり、 $f_n^{(p)}(k, \mathbf{r}_i)$ は次式で表される。

$$f_n^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) = Z_n^{(p)}(kr_i) \exp(jn\theta_i) \quad (8)$$

ただし、

$$Z_n^{(1)}(kr_i) = J_n(kr_i) \quad (9)$$

$$Z_n^{(2)}(kr_i) = H_n^{(2)}(kr_i) \quad (10)$$

であり、 $J_n(kr_i)$ はベッセル関数、 $H_n^{(2)}(kr_i)$ は第2種ハンケル関数である。

図1に示すように、2本のキラル円柱の中心は基準座標系 (x, z) において、 $(d_1, 0)$ および $(-d_2, 0)$ にあるとする。解析の都合上、各円柱の中心を原点として z 軸を基準線とする円柱座標系 (r_i, θ_i) ($i = 1, 2$) を導入する。入射ビームは最低次モードが $\tilde{z} = 0$ に最小スポットサイズ w_0 を持ち、 \tilde{z} 正方向に伝搬するエルミート・ガウスビーム波とする。 (x, z) 座標系におけるビームウェストの位置を $(-x_0, -z_0)$ とし、z 軸と \tilde{z} 軸が θ_0 の角をなすとする。ベッセル関数に対する加法定理を用いると、 (r_i, θ_i) 座標系において入射電界は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i(k, \mathbf{r}_i) &= \hat{y} G_n \\ &= \frac{-j}{k} \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m(i, n) \mathbf{N}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}_i), & |\rho_{i0}| < r_i \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m(i, n) \mathbf{N}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}_i), & |\rho_{i0}| > r_i \end{cases} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i(k, \mathbf{r}_i) &= \frac{j}{\omega \mu_0} \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m(i, n) \mathbf{M}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}_i), & |\rho_{i0}| < r_i \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m(i, n) \mathbf{M}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}_i), & |\rho_{i0}| > r_i \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

ここで, $\alpha_m(i, n), \beta_m(i, n)$ は,

$$\alpha_m(i, n) = \left(\frac{jk}{2}\right)^n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} J_{m+n-2p}(k\rho_{i0}) \cdot \exp[-j(m+n-2p)\phi_{i0} + j(n-2p)\theta_0] \quad (13)$$

$$\beta_m(i, n) = \left(\frac{jk}{2}\right)^n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} H_{m+n-2p}^{(2)}(k\rho_{i0}) \cdot \exp[-j(m+n-2p)\phi_{i0} + j(n-2p)\theta_0] \quad (14)$$

であり,

$$\rho_{i0} = [(\pm d_i + x_0 + jb \sin \theta_0)^2 + (z_0 + jb \cos \theta_0)^2]^{1/2} \quad (15)$$

$$\phi_{i0} = \tan^{-1} \frac{\pm d_i + x_0 + jb \sin \theta_0}{z_0 + jb \cos \theta_0} \quad (16)$$

$$r_i = [(x \mp d_i)^2 + z^2]^{1/2} \quad (17)$$

$$\theta_i = \tan^{-1}(x \mp d_i)/z \quad (18)$$

また, $\binom{n}{p}$ は二項係数である。また, 複号は $i = 1, 2$ に対応する。

i 番目の円柱の散乱電磁界は円柱ベクトル波動関数を用いて次式のように展開できる。

$$\mathbf{E}^s(k, \mathbf{r}_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_m^s(i, n) \mathbf{P}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}_i) + \beta_m^s(i, n) \mathbf{Q}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}_i) \right\} \quad (19)$$

$$\mathbf{H}^s(k, \mathbf{r}_i) = \frac{k}{j\omega\mu_0} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_m^s(i, n) \mathbf{P}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}_i) - \beta_m^s(i, n) \mathbf{Q}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}_i) \right\} \quad (20)$$

ここで, $\mathbf{P}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i), \mathbf{Q}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i)$ は次式で定義される。

$$\mathbf{P}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) = \mathbf{M}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) + j\mathbf{N}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) = \mathbf{M}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) - j\mathbf{N}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}_i) \quad (22)$$

境界条件を適用する際に式 (19) および (20) を l 番目の座標系 ($i \neq l$) で表現する必要がある。ベッセル関数に対する加法定理を用いると次式で表現される。

$$\mathbf{E}^s(k, \mathbf{r}_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_{q-m}^{(2)}(kr_{il}) \exp[j\theta_{il}(q-m)] \cdot \left\{ \alpha_q^s(i, n) \mathbf{P}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}_l) - \beta_q^s(i, n) \mathbf{Q}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}_l) \right\} \quad (23)$$

$$\mathbf{H}^s(k, \mathbf{r}_i) = \frac{k}{j\omega\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_{q-m}^{(2)}(kr_{il}) \exp[j\theta_{il}(q-m)] \cdot \left\{ \alpha_q^s(i, n) \mathbf{P}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}_l) - \beta_q^s(i, n) \mathbf{Q}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}_l) \right\} \quad (24)$$

一方, i 番目の円柱内部の電磁界は次式のように展開できる。

$$\mathbf{E}^t(k, \mathbf{r}_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ a_m(i, n) \mathbf{P}_m^{(1)}(k_i^+, \mathbf{r}_i) + b_m(i, n) \mathbf{Q}_m^{(1)}(k_i^-, \mathbf{r}_i) \right\} \quad (25)$$

$$\mathbf{H}^t(k, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{j\omega\mu_i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (k_i^+ + \omega\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}) a_m(i, n) \mathbf{P}_m^{(1)}(k_i^+, \mathbf{r}_i) - (k_i^- - \omega\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}) b_m(i, n) \mathbf{Q}_m^{(1)}(k_i^-, \mathbf{r}_i) \right\} \quad (26)$$

未知係数 $\alpha_m^s(i, n), \beta_m^s(i, n), a_m(i, n), b_m(i, n)$ は, 円柱境界面において電磁界の接線成分が連続である次式の境界条件から求めることができる。

$$\left\{ \mathbf{E}^i(k, \mathbf{r}_i) + \sum_{l=1}^2 \left[\mathbf{E}^s(k, \mathbf{r}_i) - \mathbf{E}^t(k, \mathbf{r}_i) \right] \right\} \times \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (27)$$

$$\left\{ \mathbf{H}^i(k, \mathbf{r}_i) + \sum_{l=1}^2 \left[\mathbf{H}^s(k, \mathbf{r}_i) - \mathbf{H}^t(k, \mathbf{r}_i) \right] \right\} \times \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (28)$$

ここで, $\hat{\mathbf{r}}$ は各円柱での r 方向の単位ベクトルである。未知係数 $\alpha_m^s(i, n)$ および $\beta_m^s(i, n)$ について整理すると, 連立 1 次方程式が得られる。具体的な表現式は付録に示す。

4. 数値計算結果

本節では前節で得られた散乱界表現を用いて, 2本のキラル円柱によるガウスビーム波の近傍散乱電界を計算する。入射ビームは柱軸方向に偏波され, $(0, -\lambda)$ に最小スポットサイズ $w_0 = 2\lambda$ を持つ最低次モード ($n=0$) とする。なお, 波長は $\lambda = 1.55[\mu\text{m}]$ とし, $z = \lambda$ を観測面としている。

2本のキラル円柱は自由空間中に配置され, その半径は $a_1 = a_2 = a = 0.5\lambda$, 比誘電率は $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = \varepsilon_r = 4.0$, 比透磁率は $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_r = 1.0$ とする。また, 電磁界の展開項数は界の収束が十分と考えられる $m = \pm 30$ までとっている。

先ず, 未知係数の妥当性を調べるため, 2本の誘電体円柱 ($\kappa = 0.0$) によるガウスビーム波の遠方散乱電界を調べた。遠方界はハンケル関数の漸近近似表現を用い

て求める。得られた結果が文献¹⁷⁾のそれとよく一致することを確認した。

図3 (a) および (b) は、それぞれ、2本の誘電体円柱間の距離が $d_1 = d_2 = d = 1.6\lambda$ および $d = 2.5\lambda$ の場合の規格化近傍散乱電界 $|E_y|$ を示している。この図より、円柱間の距離が小さい場合、入射ビーム波の伝搬軸付近に電界が集中するのに対して、円柱間の距離が大きくなると、各円柱座標系での $\theta_i = 0$ 付近で電界が最大値を取ることがわかる。これは、各円柱からの散乱電界が相互に干渉しているためと考えられる。

図4および図5は、それぞれ、 $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa = 0.1$ および $\kappa = 0.3$ の場合の規格化近傍散乱電界 $|E_y|$ を示し

ている。なお、その他のパラメータは図3と同じである。キラル係数が小さい場合、誘電体円柱の場合とほぼ同様の電界分布である。しかし、キラル係数が大きくなると誘電体円柱の場合(図3参照)と異なり各円柱座標系での $\theta_i = 0$ 付近で電界が最大となっている。

図6 (a) および (b) は、それぞれ、 $\kappa = 0.1$ および $\kappa = 0.3$ に対する近傍散乱電界の x 成分(交叉偏波成分)を示している。ただし、主偏波成分の最大値で規格化している。この図より、キラル円柱により偏波面が回転していることがわかる。また、キラル性が大きくなると交叉偏波成分が大きくなっている。

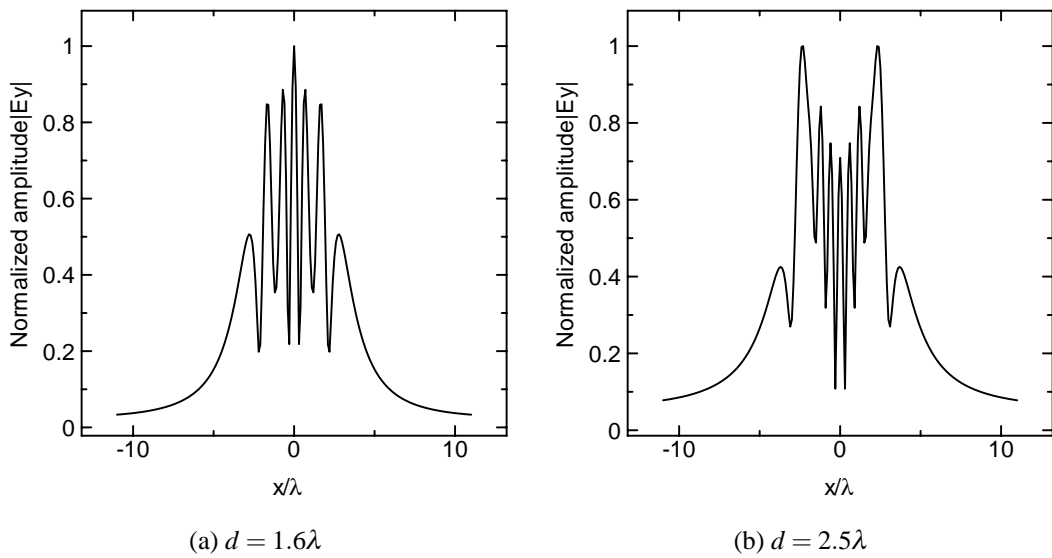


図3 誘電体円柱による近傍散乱電界 ($\kappa = 0.0$)

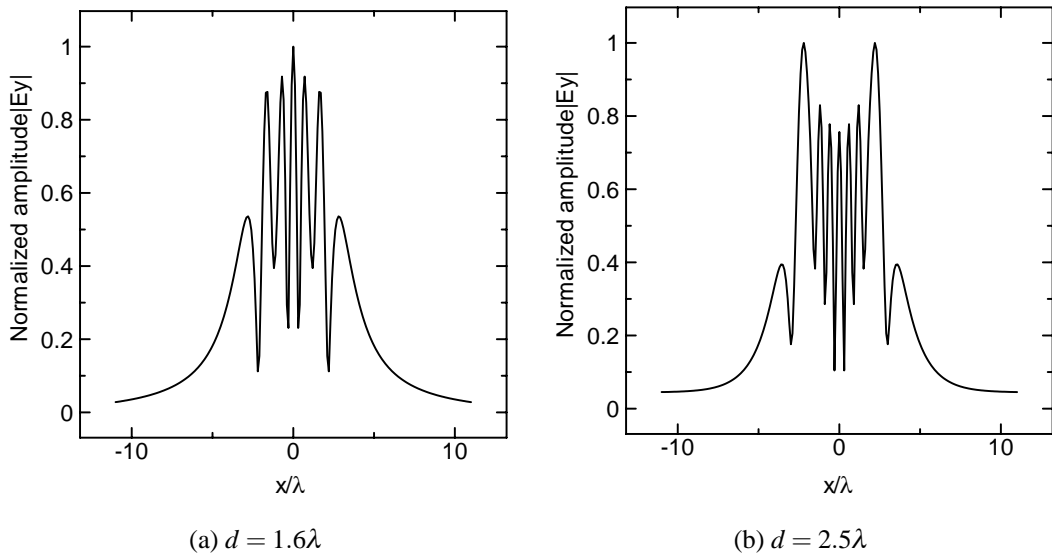


図4 近傍散乱電界 ($\kappa = 0.1$)

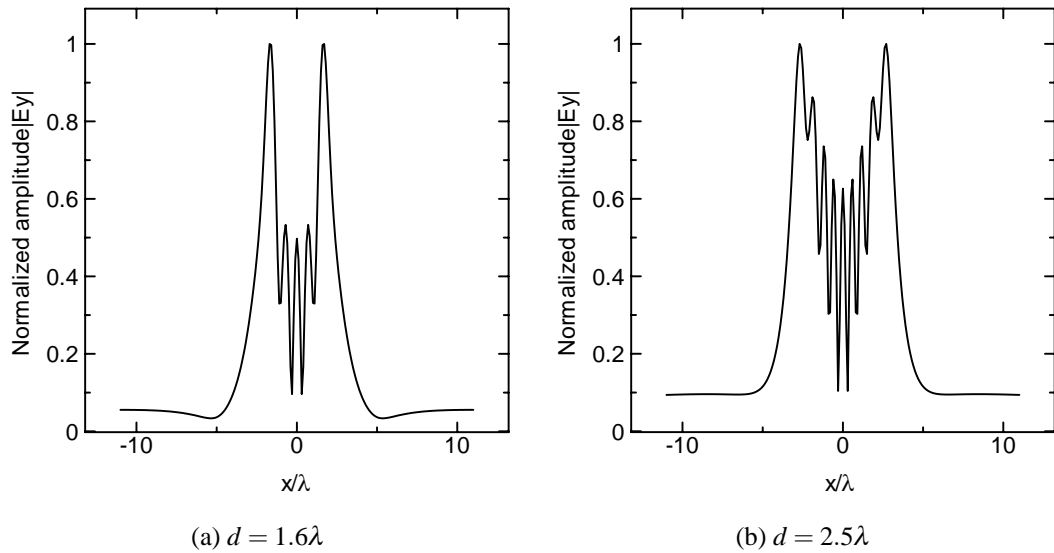


図5 近傍散乱電界 ($\kappa = 0.3$)

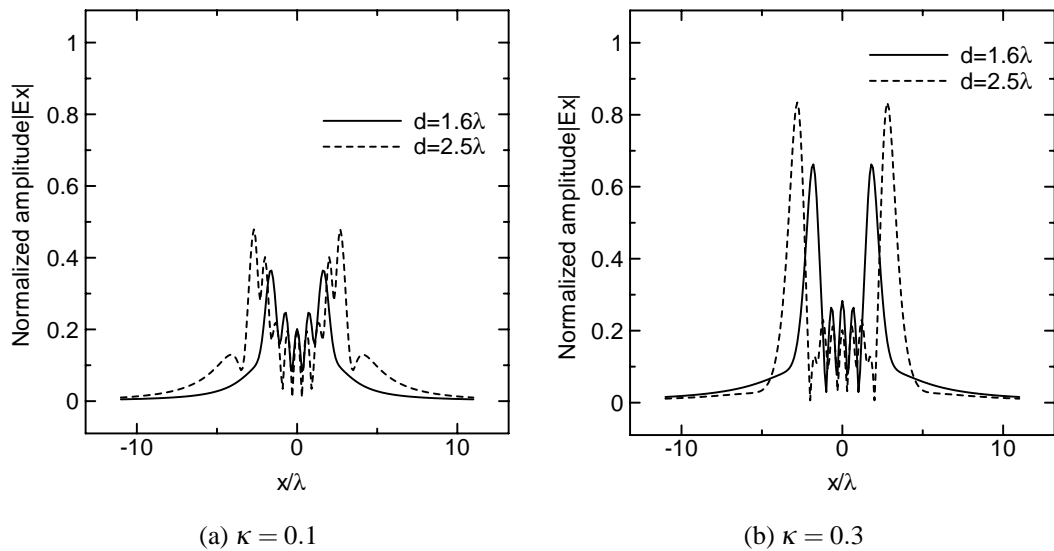


図6 交叉偏波成分の近傍散乱電界

5. 結論

本研究では、通常のエルミート・ガウスビーム波と複素多重極界との関係を用いて、2本のキラル円柱によるエルミート・ガウスビーム波の近傍散乱界について検討を行った。

まず、2本の誘電体円柱によるガウスビーム波の遠方散乱界が従来の結果と一致したことを確認した。また、円柱間の距離に依存して散乱電界の最大値が生じる位置が、電磁界の相互干渉により異なることを示した。一方、キラル円柱の場合にはキラル係数が大きくなるにつれて、散乱電界は各円柱座標系の中心付近に分布することが示された。

今後の課題としては、高次モードによる散乱界の計算、H波入射に対する解析、2本以上の複数キラル円

柱の散乱問題の解析などが考えられる。

参考文献

- 1) N. Engheta and D. L. Jaggard, "Electromagnetic Chirality and Its Applications," IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter, 1988.
- 2) I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, and A. J. Viitanen, Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media, Artech House, Boston, 1994.
- 3) M. Tanaka and A. Kusunoki, "Scattering characteristics of stratified chiral slab," Trans. Inst. Electron. Info. Commun. Eng. Jpn., vol. E76-C, pp. 1443-1448, 1993.
- 4) K. Matsumoto, K. Rokushima, and J. Yamakita,

- “Analysis of diffracted waves from isotropic chiral gratings,” Trans. Inst. Electron. Info. Commun. Eng. Jpn., vol. J79-C-I, pp. 165–172, 1996.
- 5) C. F. Bohren, “Scattering of electromagnetic waves by an optically active cylinder,” J. Colloid and Interface Sci., vol. 66, pp. 105–109, 1978.
 - 6) C. F. Bohren, “Light scattering by an optically active sphere,” Chemical Phys. Lett., vol. 29, pp. 458–462, 1974.
 - 7) M. S. Kluskens and E. H. Newman, “Scattering by a chiral cylinder of arbitrary cross section,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 38, pp. 1448–1455, 1990.
 - 8) M. A. Al-Kanhal and E. Arvas, “Electromagnetic scattering from a chiral cylinder of arbitrary cross section,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 44, pp. 1041–1048, 1996.
 - 9) A. E. Siegman, “Hermite–Gaussian functions of complex argument as optical–beam eigenfunctions,” J. Opt. Soc. Am., vol. 63, pp. 1903–1904, 1973.
 - 10) S. Y. Shin and L. B. Felsen, “Gaussian beam modes by multipoles with complex source points,” J. Opt. Soc. Am., vol. 67, pp. 699–700, 1977.
 - 11) 横田光広, 竹中隆, 福光於菟三, “通常のビームモードと複素指数のビームモードとの関係,” 信学論, vol. J68–C, pp. 1130–1131, 1985.
 - 12) M. Yokota, S. He, and T. Takenaka, “Scattering of a Hermite–Gaussian beam field by a chiral sphere,” J. Opt. Soc. Am. A, vol. 18, pp. 1681–1689, 2001.
 - 13) 横田光広, 甲斐真由美, “キラル円柱による高次ガウスビーム波の近傍散乱界,” 電子情報通信学会電磁界理論研究会, EMT-01-132, 2001.
 - 14) A. Ishimaru, Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
 - 15) L. Tsang, J. A. Kong, and K.-H. Ding, Scattering of Electromagnetic Waves –Theory and Applications–, John-Wiley & Sons, N.Y., 2000.
 - 16) Y. Nanbu, W. Ren, T. Matsuoka, M. Hiramoto, and M. Tateiba, “The effective properties of a medium containing randomly distributed chiral spheres,” Proc. of 2001 URSI International Symp. on EM Theory, pp. 178–180, 2001.
 - 17) M. Yokota, T. Takenaka, and O. Fukumitsu, “Relation between conventional and complex–argument Hermite–Gaussian beam and its application to scattering by cylinders,” Proceedings of ISAP, pp. 827–830, 1985.
 - 18) M. Yokota, T. Takenaka, and O. Fukumitsu, “Scattering of laser Hermite–Gaussian beam mode by parallel dielectric circular cylinders,” J. Opt. Soc. Am. A, vol. 4, pp. 581–586, 1986.

A 付録

境界条件式から係数 $a_m(i, n)$ および $b_m(i, n)$ を消去すると, 未知係数 $\alpha_m^s(i, n)$ および $\beta_m^s(i, n)$ について次式の連立 1 次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(1) & \bar{\mathbf{S}}(1) & \mathbf{X}(2:1)\mathbf{T}(1) & \mathbf{X}(2:1)\bar{\mathbf{T}}(1) \\ \mathbf{U}(1) & \bar{\mathbf{U}}(1) & \mathbf{X}(2:1)\mathbf{V}(1) & \mathbf{X}(2:1)\bar{\mathbf{V}}(1) \\ \mathbf{X}(1:2)\mathbf{T}(2) & \mathbf{X}(1:2)\bar{\mathbf{T}}(2) & \mathbf{S}(2) & \bar{\mathbf{S}}(2) \\ \mathbf{X}(1:2)\mathbf{V}(2) & \mathbf{X}(1:2)\bar{\mathbf{V}}(2) & \mathbf{U}(2) & \bar{\mathbf{U}}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^s(1, n) \\ \beta^s(1, n) \\ \alpha^s(2, n) \\ \beta^s(2, n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(1) \\ \bar{\mathbf{W}}(1) \\ \mathbf{W}(2) \\ \bar{\mathbf{W}}(2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

ここで, 行列 $\mathbf{X}(l:i)$ は要素が $X_{mq}(l:i)$ であり, また, $\mathbf{S}(i), \bar{\mathbf{S}}(i), \mathbf{U}(i), \bar{\mathbf{U}}(i), \mathbf{V}(i), \bar{\mathbf{V}}(i), \mathbf{W}(i), \bar{\mathbf{W}}(i)$ は, 列ベクトルで各成分は次式で与えられる。

$$X_{mq}(l:i) = H_{q-m}^{(2)}(kr_{li}) \exp[j\theta_{li}(q-m)] \quad (30)$$

$$\begin{aligned} S_m(i) = & \left\{ J'_m(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J'_m(k_i^- a_i) \right\} H_m^{(2)}(ka_i) + \gamma_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^- a_i) + H_m^{(2)}(ka_i) J'_m(k_i^- a_i) \right\} J_m(k_i^+ a_i) \\ & - \delta_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) - H_m^{(2)}(ka_i) J'_m(k_i^+ a_i) \right\} J_m(k_i^- a_i) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_m(i) = & \left\{ J'_m(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J'_m(k_i^- a_i) \right\} H_m^{(2)}(ka_i) \\ & + \gamma_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^- a_i) - H_m^{(2)}(ka_i) J'_m(k_i^- a_i) \right\} J_m(k_i^+ a_i) \end{aligned}$$

$$- \delta_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) + H_m^{(2)}(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m(k_i^- a_i) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} T_m(i) &= \left\{ J_m'(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m(ka_i) + \gamma_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(ka_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m(k_i^+ a_i) \\ &\quad - \delta_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) - J_m(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m(k_i^- a_i) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_m(i) &= \left\{ J_m'(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m(ka_i) + \gamma_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^- a_i) - J_m(ka_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m(k_i^+ a_i) \\ &\quad - \delta_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) + J_m(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m(k_i^- a_i) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} U_m(i) &= \left\{ J_m'(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} H_m^{(2)'}(ka_i) \\ &\quad + \gamma_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^- a_i) + H_m^{(2)}(ka_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m'(k_i^+ a_i) \\ &\quad + \delta_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) - H_m^{(2)}(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m'(k_i^- a_i) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_m(i) &= - \left\{ J_m'(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} H_m^{(2)'}(ka_i) \\ &\quad + \gamma_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^- a_i) - H_m^{(2)}(ka_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m'(k_i^+ a_i) \\ &\quad + \delta_i \left\{ H_m^{(2)'}(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) + H_m^{(2)}(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m'(k_i^- a_i) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} V_m(i) &= \left\{ J_m'(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m'(ka_i) + \gamma_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(ka_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m'(k_i^+ a_i) \\ &\quad + \delta_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) - J_m(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m'(k_i^- a_i) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_m(i) &= - \left\{ J_m'(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m'(ka_i) + \gamma_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^- a_i) - J_m(ka_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m'(k_i^+ a_i) \\ &\quad + \delta_i \left\{ J_m'(ka_i) J_m(k_i^+ a_i) + J_m(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m'(k_i^- a_i) \end{aligned} \quad (38)$$

$$W_m(i) = \frac{\beta_m(i, n)}{k} \left\{ \gamma_i J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) + \delta_i J_m(k_i^- a_i) J_m'(k_i^+ a_i) \right\} J_m(ka_i) \quad (39)$$

$$\bar{W}_m(i) = \frac{\beta_m(i, n)}{k} \left[\left\{ J_m'(k_i^+ a_i) J_m(k_i^- a_i) + J_m(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right\} J_m'(ka_i) + (\gamma_i - \delta_i) J_m(ka_i) J_m'(k_i^+ a_i) J_m'(k_i^- a_i) \right] \quad (40)$$

$$\gamma_i = \frac{-1}{\mu_{r_i}} \frac{k_i^+ + \omega \kappa \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{k}, \quad \delta_i = \frac{1}{\mu_{r_i}} \frac{k_i^- - \omega \kappa \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{k} \quad (41)$$

ただし、プライム記号 (') は指数に関する微分を表す。