

## キラル円柱による高次ガウスビーム波の近傍散乱界

横田 光広, 甲斐 真由美  
(宮崎大学)

Scattered Near Field of a Higher Order Gaussian Beam Wave by a Chiral Cylinder  
Mitsuhiro Yokota and Mayumi Kai (Miyazaki University)

## Abstract

Scattering of a Hermite-Gaussian beam wave by a chiral cylinder is analyzed. A Hermite-Gaussian beam wave is expressed as a superposition of multipole fields at complex source points. Electromagnetic fields are expanded in terms of the cylindrical vector wave functions. The unknown expansion coefficients for the scattered field and the internal field are determined by the boundary conditions. As numerical examples, the scattered near fields of the beam incidence are calculated and the effects of chirality, the polarization and the radius of the chiral cylinder on the fields are examined.

キーワード：ガウスビーム波，キラル円柱，複素点波源法，円柱ベクトル波動関数

(Gaussian beam, chiral cylinder, complex source point method, cylindrical vector wave function)

## 1. まえがき

物体による電磁波の散乱問題は電磁界解析の分野における基礎問題の1つであり、古くから理論的、数値的に検討されている[1],[2]。解析のしやすから、最も基本的な形状である円柱による2次元散乱問題が取り扱われている。

キラル媒質[3]は、光や電磁波領域における光学活性やその応用に関する興味ある現象のため多くの研究者により研究が行われている。これまで、キラル層状媒質における反射および透過[4]、キラルグレーティングにおける放射特性[5]、円柱[6]、球[7]、任意形状の物体[8],[9]による散乱などが報告されている。

一方、電磁ホーンやレーザ共振器から放射される電磁波は近軸ビーム波あるいはその重ねあわせで精度良く近似されることが知られている。Deschamps[10]は、波源の位置を形式的に複素空間に移行する(複素点波源法)と放射界が漸近・近軸領域において精度良く表されることを示した。その後、複素多重極界[11]がSiegman[12]により提案された複素エルミート・ガウスビーム波と関連していることが報告されている。複素エルミート・ガウスビーム波は理論解析する際は優れているが、波面が球面で無いため実用上取り扱い難い面がある。この問題を解決するために、良く用いられている通常のエルミート・ガウスビーム波との関係式[13]が導かれた。

本報告では、キラル円柱によるエルミート・ガウスビーム波の散乱問題を複素点波源法を用いて解析する。エルミート・ガウスビーム波は複素多重極界の有限項和で表現される。また、電磁界は円柱ベクトル波動関数で展開され、未知係数は境界条件から決定する。数値例と

して、近傍散乱電界に対するキラル係数、円柱の半径、偏波の影響について検討している。なお、本報告では時間因子を  $\exp(j\omega t)$  とし以下これを省略する。

## 2. 複素多重極解とガウスビーム波との関係

複素点  $(-x_0, -z_0 - jb)$  に置かれた波源からの放射界  $G_0$  は、次式で与えられる。

$$G_0 = H_0^{(2)}(kR) \quad (1)$$

$$R = \sqrt{(x + x_0)^2 + (z + z_0 + jb)^2} \quad (2)$$

ここで、 $H_0^{(2)}(kR)$  は0次第2種ハンケル関数、 $w_0 (= \sqrt{2b/w_0})$  は最低次モードの最小スポットサイズ、 $k (= 2\pi/\lambda)$  は自由空間中における波数である。本報告では、 $R$  の分岐として放射条件を満足するように選んでいる。複素多重極界を次式で定義する[11]

$$G_n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G_0 \quad (3)$$

通常のエルミート・ガウスビーム波  $\psi_n$  は漸近・近軸近似の下で次式のように複素多重極界の有限項和で表される[13]

$$\psi_n = (-1)^n k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{n!w_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-kb} \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{2^{-p} w_0^{n-2p}}{p!(n-2p)!} G_{n-2p} \quad (4)$$

式(4)より、通常のエルミート・ガウスビーム波の散乱界は複素多重極界の散乱波の重ね合わせで与えられ

ることがわかる。従って、以下では、複素多重極界の散乱問題について解析を行う。

### 3. キラル円柱によるエルミート・ガウスビーム波の散乱

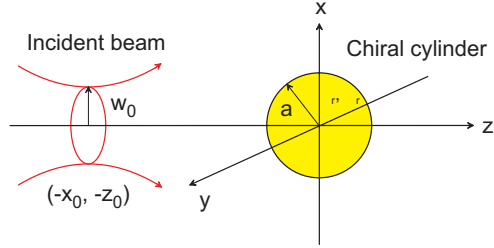


図1 問題の座標系

本節では、図1に示すように最低次モードが $(-x_0, -z_0)$ に最小スポットサイズを持つエルミート・ガウスビーム波がキラル円柱に入射した場合の散乱問題について解析を行う。ただし、キラル円柱は半径 $a$ 、非誘電率 $\epsilon_r$ 、比透磁率 $\mu_r$ 、キラル係数 $\kappa$ のパラメータで構成されている。キラル媒質における構成方程式を次式で定義する。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} - j\kappa \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{H} \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = j\kappa \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{E} + \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (6)$$

この媒質中では2つの固有値(伝搬係数) $k^+, -k^-$ を持つことが知られている。

$$k^\pm = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} (\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \pm \kappa) \quad (7)$$

次に円柱ベクトル波動関数 $\mathbf{M}_n^{(p)}(k, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{N}_n^{(p)}(k, \mathbf{r})$ を次式で定義する。

$$\mathbf{M}_n^{(p)}(k, \mathbf{r}) = \nabla \times [\hat{y} f_n^{(p)}(k, \mathbf{r})] \quad (8)$$

$$\mathbf{N}_n^{(p)}(k, \mathbf{r}) = \frac{j}{k} \nabla \times \mathbf{M}_n^{(p)}(k, \mathbf{r}), \quad p = 0, 1 \quad (9)$$

ここで、 $\hat{y}$ は $y$ 軸方向の単位ベクトルであり、 $f_n^{(p)}(k, \mathbf{r})$ は次式で表される。

$$f_n^{(p)}(k, \mathbf{r}) = Z_n^{(p)}(kr) \exp(jn\theta) \quad (10)$$

ただし、

$$Z_n^{(1)} = J_n(kr) \quad (11)$$

$$Z_n^{(2)} = H_n^{(2)}(kr) \quad (12)$$

であり、 $J_n(kr)$ はベッセル関数、 $H_n^{(2)}(kr)$ は第2種ハンケル関数である。以下では、E波およびH波に対する散乱問題について検討する。

#### 3.1 E波の場合

電界が柱軸方向に偏波したE波に対して、ベッセル関数に対する加法定理を用いると、入射電磁界は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i(k, \mathbf{r}) &= \hat{y} G_n \\ &= \frac{1}{jk} \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m(n) \mathbf{N}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| < r \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_m(n) \mathbf{N}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| > r \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}^i(k, \mathbf{r})$$

$$= \frac{j}{\omega \mu_0} \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m(n) \mathbf{M}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| < r \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_m(n) \mathbf{M}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| > r \end{cases} \quad (14)$$

ここで、係数 $\alpha_m(n)$ 、 $\beta_m(n)$ は次式のように陽に求めることができる[14]

$$\alpha_m(n) = \left(\frac{jk}{2}\right)^n \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \binom{n}{p} J_{m+n-2p}(kr_0) e^{-j(m+n-2p)\phi_0} \quad (15)$$

$$\beta_m(n) = \left(\frac{jk}{2}\right)^n \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \binom{n}{p} H_{m+n-2p}^{(2)}(kr_0) e^{-j(m+n-2p)\phi_0} \quad (16)$$

また、 $\binom{n}{p}$ は二項係数、

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + (z_0 + jb)^2} \quad (17)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}(x_0 / (z_0 + jb)) \quad (18)$$

である。

散乱電磁界は円柱ベクトル波動関数を用いて次式のように展開できる。

$$\mathbf{E}^s(k, \mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\alpha_m^s \mathbf{P}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}) + \beta_m^s \mathbf{Q}_m^{(2)}(k, \mathbf{r})] \quad (19)$$

$$\mathbf{H}^s(k, \mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\alpha_m^s \mathbf{P}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}) - \beta_m^s \mathbf{Q}_m^{(2)}(k, \mathbf{r})] \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{P}_m^{(p)}(k, \mathbf{r})$ 、 $\mathbf{Q}_m^{(p)}(k, \mathbf{r})$ は次式で定義される。

$$\mathbf{P}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}) = \mathbf{M}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}) + j\mathbf{N}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}) \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}) = \mathbf{M}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}) - j\mathbf{N}_m^{(p)}(k, \mathbf{r}) \quad (22)$$

一方，円柱内部の電磁界は次式のように展開できる。

$$\mathbf{E}(k, \mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ a_m \mathbf{P}_m^{(1)}(k^+, \mathbf{r}) + b_m \mathbf{Q}_m^{(1)}(k^-, \mathbf{r}) \right] \quad (23)$$

$$\mathbf{H}(k, \mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega\mu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ (k^+ + \omega\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}) a_m \mathbf{P}_m^{(1)}(k^+, \mathbf{r}) - (k^- - \omega\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}) b_m \mathbf{Q}_m^{(1)}(k^-, \mathbf{r}) \right] \quad (24)$$

未知係数  $\alpha_m^s, \beta_m^s, a_m, b_m$  は，円柱境界面において電磁界の接線成分が連続である次式の境界条件から求めることができる。

$$(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s - \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (25)$$

$$(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s - \mathbf{H}) \times \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (26)$$

未知係数の具体的な表現式は付録 6.1 に示す。

### 3.2 H 波の場合

磁界が柱軸方向を向いている場合についても，E 波の場合と同様に解析することができる。入射波，散乱波，キラル円柱内部の電磁界表現は，以下の通りである。

入射波

$$\mathbf{H}^i = \hat{\mathbf{y}} G_n = \frac{-j}{k} \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m(n) \mathbf{N}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| < r \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m(n) \mathbf{N}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| > r \end{cases} \quad (27)$$

$$\mathbf{E}^i = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0} \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m(n) \mathbf{M}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| < r \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m(n) \mathbf{M}_m^{(1)}(k, \mathbf{r}), & |r_0| > r \end{cases} \quad (28)$$

散乱波

$$\mathbf{H}^s(k, \mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \xi_m^s \mathbf{P}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}) + \zeta_m^s \mathbf{Q}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}) \right) \quad (29)$$

$$\mathbf{E}^s(k, \mathbf{r}) = \frac{-k}{j\omega\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \xi_m^s \mathbf{P}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}) - \zeta_m^s \mathbf{Q}_m^{(2)}(k, \mathbf{r}) \right) \quad (30)$$

円柱内部界

$$\mathbf{H} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( c_m \mathbf{P}_m^{(1)}(k^+, \mathbf{r}) + d_m \mathbf{Q}_m^{(1)}(k^-, \mathbf{r}) \right) \quad (31)$$

$$\mathbf{E} = \frac{-1}{j\omega\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (k^+ + \omega\kappa\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) c_m \mathbf{P}_m^{(1)}(k^+, \mathbf{r}) - (k^- - \omega\kappa\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) d_m \mathbf{Q}_m^{(1)}(k^-, \mathbf{r}) \right] \quad (32)$$

未知係数  $\xi_m^s, \zeta_m^s, c_m, d_m$  は境界条件から決定され，具体的な表現は付録 6.2 に示す。

### 4. 数値結果

本節では近傍散乱界に対する円柱の半径，偏波，モードの次数の影響について数値的に検討を行う。

誘電体円柱の焦点距離は，ガウス光学より次式で与えられる。

$$f = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{[\sqrt{\varepsilon_r} - 1]^2} a. \quad (33)$$

入射ビームは波， $(0, -f)$  に最低次モード ( $n = 0$ ) の最小スポットサイズ  $w_0 = \lambda$  を持つとする。キラル円柱は自由空間中に配置され，その比誘電率は  $\varepsilon_r = 4.0$ ，比透磁率は  $\mu_r = 1.0$  とした。また，電磁界の展開項数は界の収束が十分と考えられる  $m = \pm 30$  までとっている。なお，波長は  $\lambda = 1.55[\mu\text{m}]$  とし， $z = f$  を観測面としている。

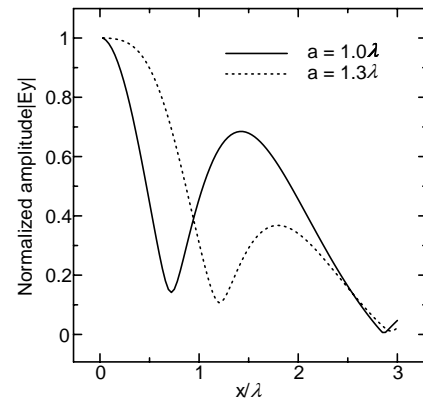


図2 平面波入射に対する誘電体円柱による近傍散乱電界 ( $\kappa = 0.0$ )

図2はE偏光した平面波が誘電体円柱 ( $\kappa = 0.0$ ) に入射した場合の近傍散乱電界を表している。最低次モード入射に対する散乱電界は，ビームウエストの位置を円柱から離すと図2に近づくことを確認した。

図3及び図4は，E波の最低次モードが半径  $a = 0.5\lambda$  及び  $a = 1.0\lambda$  のキラル円柱に入射した場合の近傍散乱界をいくつかのキラル係数に対して示している。ただし，主偏波成分 ( $|E_y|$ ) の最大値で規格化している。これらの図より，半径が大きい場合，円柱の中心部を通過する波と外側を通過する波との干渉効果により， $x = 1.5\lambda$  付近の電界が大きくなっている。また，いず

れの半径においてもキラル性により交叉偏波成分 ( $|E_x|$  及び  $|E_z|$ ) が発生し、偏波が回転していることがわかる。

図5は、H波の最低次モードが半径  $a = 1.0\lambda$  のキラル円柱に入射した場合の近傍散乱界をいくつかのキラル係数に対して示している。ただし、 $|E_x|$  の最大値で規格化している。E波の場合と同様にキラル性により交叉偏波が成分が発生し偏波が回転している。

( $n = 1$ ) が半径  $a = 1.0\lambda$  のキラル円柱に入射した場合の近傍散乱界をいくつかのキラル係数に対して示している。キラル係数が大きくなると近傍散乱界の最大値の位置がずれている。また、偏波の違いとしてE波の方が界分布の変化が大きいことが分かる。いずれの場合も、近傍散乱界は原点で0となり、入射波の界分布の形状と同じになっている。

図6 (a) 及び (b) は、E波及びH波の1次モード

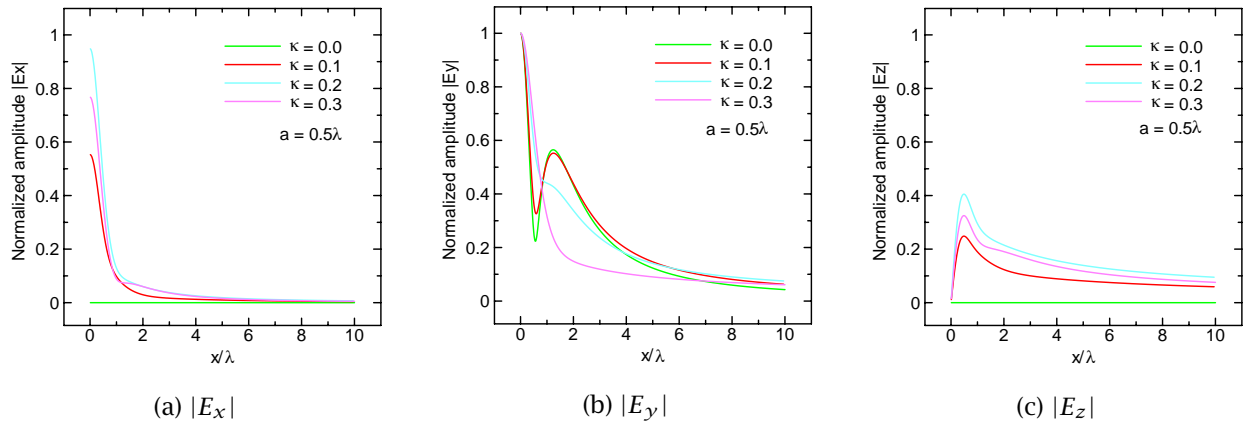


図3 E波入射に対する近傍散乱界 ( $a = 0.5\lambda$ )

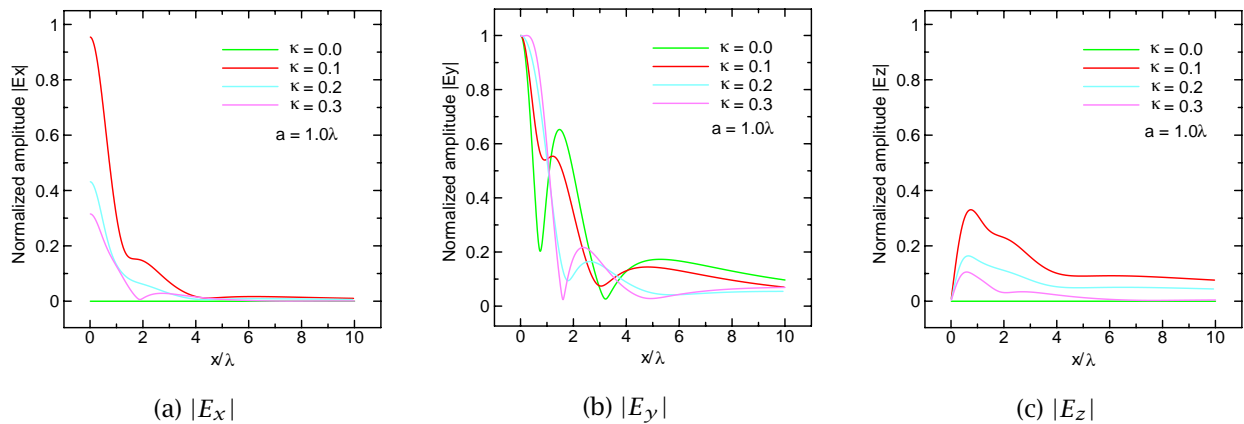


図4 E波入射に対する近傍散乱界 ( $a = 1.0\lambda$ )

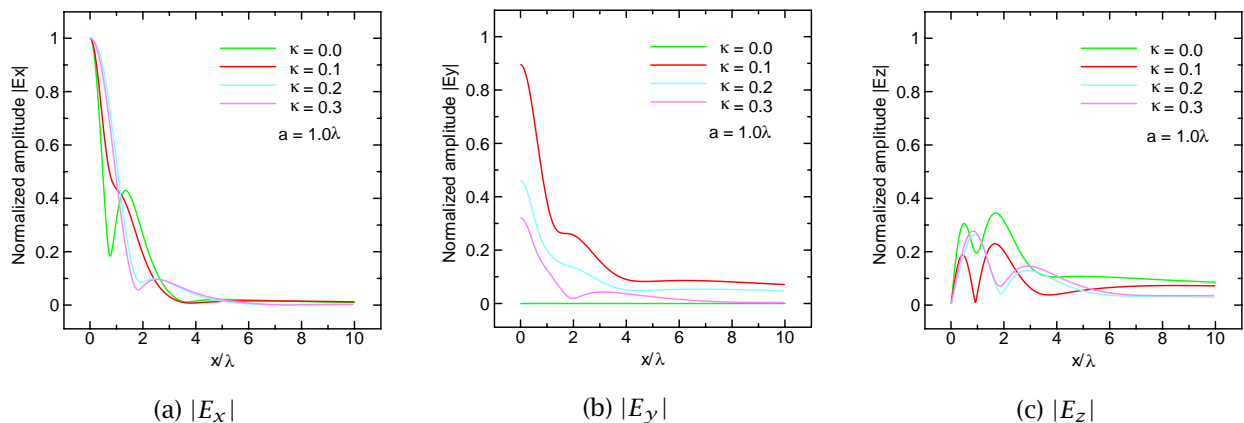


図5 H波入射に対する近傍散乱界

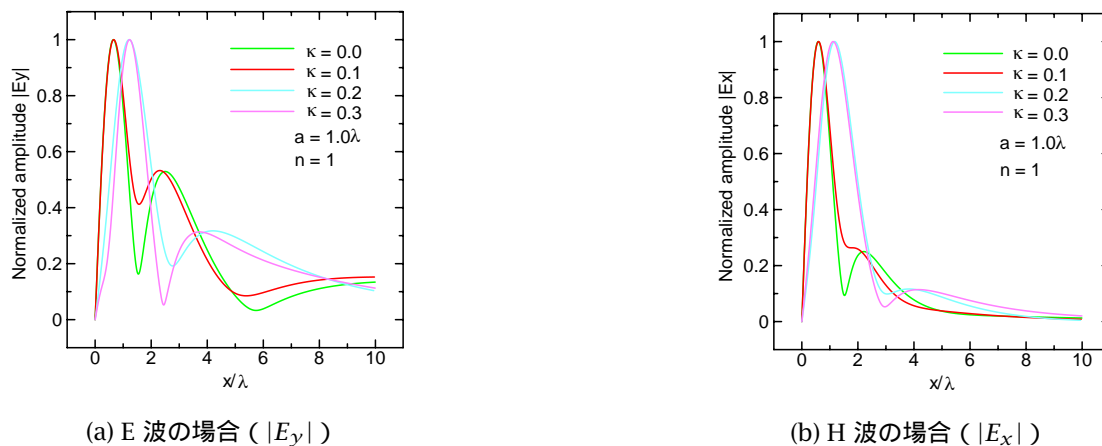


図6 1次モード入射による近傍散乱界

## 5. 結論

本研究では、キラル円柱によるエルミート・ガウスビーム波の散乱について複素点波源法を用いて解析を行った。電磁界成分は円柱ベクトル波動関数を用いて展開し、境界条件から未知係数を決定した。

数値例として、近傍散乱界に対するキラル性、半径、偏波、モード次数の影響について検討を行った。半径が大きい場合、円柱の中心部を通過する波と外側を通過する波との干渉効果により大きなサイドローブが発生していることがわかった。また、キラル性により偏波の回転が生じていることを確認した。

今後の課題としては、遠方散乱界の検討、複数のキラル円柱の散乱問題の解析などがある。

## 参考文献

- [ 1 ] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory (Second Edition)*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [ 2 ] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, Prentice Hall, New Jersey, 1991
- [ 3 ] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, and A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*, Artech House, Boston, 1994.
- [ 4 ] M. Tanaka and A. Kusunoki, "Scattering characteristics of stratified chiral slab," *Trans. Inst. Electron. Info. Commun. Eng. Jpn.*, **E76-C**, pp. 1443-1448, 1993.
- [ 5 ] K. Matsumoto, K. Rokushima, and J. Yamakita, "Analysis of diffracted waves from isotropic chiral gratings," *Trans. Inst. Electron. Info. Commun. Eng. Jpn.*, **J79-C-I**, pp. 165-172, 1996.
- [ 6 ] C. F. Bohren, "Scattering of electromagnetic waves by an optically active cylinder," *J. Colloid and Interface Sci.*, **66**, pp. 105-109, 1978.
- [ 7 ] C. F. Bohren, "Light scattering by an optically active sphere", *Chemical Phys. Lett.*, **29**, pp. 458-462, 1974.
- [ 8 ] M. S. Kluskens and E. H. Newman, "Scattering by a chiral cylinder of arbitrary cross section", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **38**, pp. 1448-1455, 1990.
- [ 9 ] M. A. Al-Kanhal and E. Arvas, "Electromagnetic scattering from a chiral cylinder of arbitrary cross section", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **44**, pp. 1041-1048, 1996.
- [ 10 ] G. A. Deschamps, "Gaussian beam as a bundle of complex rays," *Electron. Lett.*, **7**, pp. 684-685, 1971.
- [ 11 ] S. Y. Shin and L. B. Felsen, "Gaussian beam modes by multipoles with complex source points," *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, pp. 699-700, 1977.
- [ 12 ] A. E. Siegman, "Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical-beam eigenfunctions", *J. Opt. Soc. Am.*, **63**, pp. 1093-

1094, 1973.

- [ 13 ] 横田光広, 竹中隆, 福光於菟三, “通常のビームモードと複素指数のビームモードとの関係”, 信学論, J68-C, pp. 1130-1131, 1985.

- [ 14 ] M. Yokota, T. Takenaka, and O. Fukumitsu, “Scattering of a Hermite-Gaussian beam mode by parallel dielectric circular cylinders”, J. Opt. Soc. Am. A, 3, pp. 580-586, 1986.

## 6. 付録

### 6.1 E 波の場合の未知係数

$$\begin{aligned} \alpha_m^s = & \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_m(n)}{k} f(ka) \right. \\ & + a_m \frac{k^+}{k} \{f(k^+a) + g(k^+a)\} \\ & \left. - b_m \frac{k^-}{k} \{f(k^-a) - g(k^-a)\} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \beta_m^s = & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_m(n)}{k} f(ka) \right. \\ & + a_m \frac{k^+}{k} \{f(k^+a) - g(k^+a)\} \\ & \left. - b_m \frac{k^-}{k} \{f(k^-a) + g(k^-a)\} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} a_m = & \frac{\beta_m(n)}{k^+} \{g(ka) - f(ka)\} \{ \delta f(k^-a) - g(k^-a) \} / \\ & \left[ \{f(k^+a) - \gamma g(k^+a)\} \{ \delta f(k^-a) - g(k^-a) \} \right. \\ & \left. - \{f(k^-a) - \delta g(k^+a)\} \{g(k^+a) - \gamma f(k^+a)\} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} b_m = & \frac{\beta_m(n)}{k^-} \{g(ka) - f(ka)\} \{g(k^-a) - \gamma f(k^+a)\} / \\ & \left[ \{f(k^+a) - \gamma g(k^+a)\} \{ \delta f(k^-a) - g(k^-a) \} \right. \\ & \left. - \{f(k^-a) - \delta g(k^+a)\} \{g(k^+a) - \gamma f(k^+a)\} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

ここで,

$$f(x) = \frac{J_m(x)}{H_m^{(2)}(ka)} \quad (38)$$

$$g(x) = \frac{J'_m(x)}{H_m^{(2)'}(ka)} \quad (39)$$

$$\gamma = \frac{1}{\mu_r} \frac{k^+ - j\omega\zeta}{k} \quad (40)$$

$$\delta = \frac{1}{\mu_r} \frac{k^- + j\omega\zeta}{k} \quad (41)$$

である。

### 6.2 H 波の場合の未知係数

$$\begin{aligned} \xi_m^s = & \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_m(n)}{k} f(ka) \right. \\ & + c_m \frac{k^+}{k} \{f(ka) + g(k^+a)\} \\ & \left. - d_m \frac{k^-}{k} \{f(k^-a) - g(k^-a)\} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \zeta_m^s = & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_m(n)}{k} f(ka) \right. \\ & + c_m \frac{k^+}{k} \{f(ka) - g(k^+a)\} \\ & \left. - d_m \frac{k^-}{k} \{f(k^-a) + g(k^-a)\} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} c_m = & \frac{\beta_m(n)}{k^+} \{g(ka) - f(ka)\} \{g(k^-a) - \tilde{\delta} f(k^-a)\} / \\ & \left[ \{f(k^+a) - \tilde{\gamma} g(k^+a)\} \{g(k^-a) - \tilde{\delta} f(k^-a)\} \right. \\ & \left. + \{g(k^+a) - \tilde{\gamma} f(k^+a)\} \{f(k^-a) - \tilde{\delta} g(k^-a)\} \right] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} d_m = & -\frac{\beta_m(n)}{k^-} \{g(ka) - f(ka)\} \{g(k^+a) - \tilde{\gamma} f(k^+a)\} / \\ & \left[ \{f(k^+a) - \tilde{\gamma} g(k^+a)\} \{g(k^-a) - \tilde{\delta} f(k^-a)\} \right. \\ & \left. + \{g(k^+a) - \tilde{\gamma} f(k^+a)\} \{f(k^-a) - \tilde{\delta} g(k^-a)\} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

ここで,

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{k^+ + \omega\kappa\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{k} \quad (46)$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{k^- - \omega\kappa\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{k} \quad (47)$$

である。